1. Un conjunto S de enteros positivos distintos se llama *canalero* si para cualesquiera tres números a, b, $c \in S$, todos diferentes, se cumple que a divide a bc, b divide a ca y c divide a ab.

a) Demostrar que para cualquier conjunto finito de enteros positivos $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ existen infinitos enteros positivos k, tales que el conjunto $\{kc_1, kc_2, \ldots, kc_n\}$ es canalero.

b) Demostrar que para cualquier entero $n \geq 3$ existe un conjunto canalero que tiene exactamente n elementos y ningún entero mayor que 1 divide a todos sus elementos.

2. Sean X, Y los extremos de un diámetro de una circunferencia Γ y N el punto medio de uno de los arcos XY de Γ. Sean A y B dos puntos en el segmento XY. Las rectas NA y NB cortan nuevamente a Γ en los puntos C y D, respectivamente. Las tangentes a Γ en C y D se cortan en P. Sea M el punto de intersección del segmento XY con el segmento NP. Demostrar que M es el punto medio del segmento AB.

3. Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ con $n > 5$. Demostrar que existe un conjunto finito B de enteros positivos distintos tal que $A \subseteq B$ y tiene la propiedad:

$$\prod_{x \in B} x = \sum_{x \in B} x^2,$$

es decir, el producto de los elementos de B es igual a la suma de los cuadrados de los elementos de B.

4. Sean Γ una circunferencia de centro O, AE un diámetro de Γ y B el punto medio de uno de los arcos AE de Γ. El punto $D \neq E$ está sobre el segmento OE. El punto C es tal que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo con AB paralelo a CD y BC paralelo a AD. Las rectas EB y CD se cortan en el punto F. La recta OF corta al arco menor EB de Γ en el punto I.
Demostrar que la recta EI es la bisectriz del ángulo BEC.

5. Sean A y B dos conjuntos tales que:

i) $A \cup B$ es el conjunto de los enteros positivos.

ii) $A \cap B$ es vacío.

iii) Si dos enteros positivos tienen como diferencia a un primo mayor que 2013, entonces uno de ellos está en A y el otro en B.

Hallar todas las posibilidades para los conjuntos A y B.

6. Una *configuración* es un conjunto finito S de puntos del plano entre los cuales no hay tres colineales y a cada punto se le asigna algún color, de modo que si un triángulo cuyos vértices están en S tiene un ángulo mayor o igual a $120°$, entonces exactamente dos de sus vértices son de un mismo color.
Hallar el número máximo de puntos que puede tener una configuración.